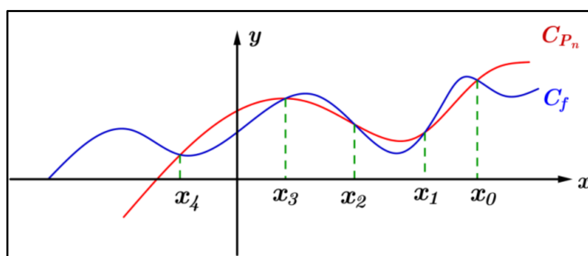
المحاضرة الثالثة الاستيفاء وجداول الفروق

إنَّ الهدف من الاستيفاء هو التعامل مع كثيرة حدود عوضاً عن دالة مفروضة، وذلك لسهولة التعامل مع كثيرات الحدود، حيث تتطابق قيمة الدالة المفروضة وقيمة كثيرة حدود الاستيفاء عند عدد من النقاط المعينة والتي تدعى نقاط الاستيفاء، بمعنى أخر إذا كانت $P_n(x)$ هي كثيرة حدود الاستيفاء للدالة $f(x)$ وكانت نقاط الاستيفاء هي $x_1, x_2, ..., x_m$ فإنَّ $P_n(x_i) = f(x_i)$ أياً كانت $1 \le i \le m$، ويمكن توضيح مفهوم الاستيفاء بيانياً بالمثال الموضح بالشكل الآتي:



1.3. جدول الفروق التقدمية.

بفرض لدينا دالة ما $y = f(x)$ معرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، ولنفرض أنَّ $y_0, y_1, ..., y_n$ هي قيم الدالة $y = f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ من مجموعة تعريف الدالة f، عندئذ فإنَّ:

الفروق التقدمية من المرتبة الأولى للدالة f تعطى بالشكل: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \; ; i = 0,1,2,...,n-1$.

الفروق التقدمية من المرتبة الثانية للدالة f تعطى بالشكل: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \; ; i = 0,1,2,...,n-2$.

الفروق التقدمية من المرتبة الثالثة للدالة f تعطى بالشكل: $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \; ; i = 0,1,2,...,n-3$.

⋮

الفروق التقدمية من المرتبة n للدالة f تعطى بالشكل: $\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$.

ونبين كيفية بناء جدول الفروق التقدمية من خلال الجدول الآتي لأجل $n = 4$:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

2.3. الاستيفاء بكثيرات الحدود طريقة نيوتن – غريغوري التقدمية.

لتكن f دالة حقيقية ولنفرض أنَّ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاطاً من مجموعة تعريف الدالة f بحيث إنَّ $x_{i+1} - x_i = h$ لأجل كل $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ وإنَّ $y_i = f(x_i)$ لأجل كل $i \in \{0,1,\ldots,n\}$، إنَّ الغاية من الاستيفاء بكثيرات الحدود هي إيجاد كثيرة حدود $p_n(x)$ من الدرجة n تحقق أنَّ:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \; ; \; \forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$$

وتعطى كثيرة الحدود $p_n(x)$ بالصيغة:

$$p_n(x) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

والتي تكتب اختصاراً بالشكل:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \Delta^k y_0 \quad ; \quad \Delta^0 y_0 = y_0$$

حيث إنَّ $s = \frac{x - x_0}{h}$، فضلاً عن ذلك إنَّ $p_n(x) \cong f(x)$ لأجل كل x من مجموعة تعريف الدالة f .

مثال.1.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التقدمية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	4.2	3.1	6	12.9	23.8	38.7

ثم احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x = -1$.

الحل. نشكل جدول الفروق التقدمية للدالة المفروضة:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	$y_0 = 4.2$					
		$\Delta y_0 = -1.1$				
1	3.1		$\Delta^2 y_0 = 4$			
		2.9		$\Delta^3 y_0 = 0$		
2	6		4		$\Delta^4 y_0 = 0$	
		6.9		0		$\Delta^5 y_0 = 0$
3	12.9		4		0	
		10.9		0		
4	23.8		4			
		14.9				
5	38.7					

نلاحظ أنَّ: $\mathrm{s}=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-0}{1}=x$. بما أنَّ $\Delta^3 y_0=\Delta^4 y_0=\Delta^5 y_0=0$ فإنَّ كثيرة الحدود الاستيفاء المطلوبة من الدرجة الثانية، ولها الشكل:

$$p_2(x)=y_0+\mathrm{s}\,\Delta y_0+\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}\text{-}1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

بالتعويض نجد أنَّ:

$$p_2(x)=4.2-1.1x+\frac{x(x\text{-}1)}{2!}4=2x^2-3.1x+4.2$$

وبالتالي يكون:

$$f(-1)\cong p_2(-1)=2-3.1+4.2=9.3$$

مثال.2.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التقدمية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة ($n=4$) الموافقة للدالة $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ حيث إنَّ $x_0=1, h=1$.

الحل.

نشكل جدول الفروق التقدمية للدالة المفروضة:[1]

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1	$y_0=1$				
		$\Delta y_0=-0.6667$			
2	0.3333		$\Delta^2 y_0=0.5334$		
		-0.1333		$\Delta^3 y_0=-0.4573$	
3	0.2		0.0761		$\Delta^4 y_0=0.4067$
		-0.0572		-0.0506	
4	0.1428		0.0255		
		-0.0317			
5	0.1111				

نلاحظ أنَّ:

$$\mathrm{s}=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-1}{1}=x-1$$

$$p_4(x)=y_0+\mathrm{s}\,\Delta y_0+\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}\text{-}1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}\text{-}1)(\mathrm{s}\text{-}2)}{3!}\Delta^3 y_0+\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}\text{-}1)(\mathrm{s}\text{-}2)(\mathrm{s}\text{-}3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

---

[1] في الآلة الحاسبة نوع $CASIO\ f\ x-991ES\ PLUS$ نضغط $MODE$ ثم نختار $7:TABLE$ ندخل الدالة وننتبه إلى أن حرف x يكتب بالضغط على $ALPHA$ ثم الضغط على زر القوس $)$ حيث إنَّ x مكتوب على الزاوية اليمنى للزر من الأعلى، نضغط $=$ فتطلب الآلة قيمة نقطة البدأ فندخلها، نضغط $=$ فتطلب الآلة قيمة نقطة النهاية (تحسب في حال لم تكن معلومة بالشكل $(x_{n-1}=x_0+h\cdot(n-1))$ ثم نضغط $=$ فتطلب الآلة قيمة $Step$ يعني h، فيظهر لنا جدول يحوي قيم x و $y=f(x)$، أي أول عمودين من جدول الفروق التقدمية. وسنكتفي فقط في حال لم تعطى الدالة كجدول بأربع أرقام بعد الفاصلة للسهولة.

$$p_4(x)=1-(x-1)\,0.6667+\frac{(x-1)(x-2)}{2!}0.5334-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}0.4573+$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4!}0.4067$$

$$p_4(x)=1-(x-1)\,0.6667+(x^2-3x+2)0.2667-(x^3-6x^2+11x-6)0.0762+$$
$$+(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)0.0169$$

وتكون كثيرة حدود الاستيفاء:

$$p_4(x)=0.0169x^4-0.2452x^3+1.3154x^2-3.15x+3.0629$$

مبرهنة 1.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة متتالية في المجال $[x_0,x_0+h]$ وكانت $p_n(x)$ هي كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة n للدالة f عندئذ فإنَّ الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند النقطة x_l يعطى بالشكل:

$$R(x_l)=f(x_l)-p_n(x_l)=C_{n+1}^{s}\Delta^{n+1}y_0 \quad ; \quad s=\frac{x_l-x_0}{h}$$

مثال 3.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التقدمية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة الثالثة الموافقة للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.3
y_i	1.3914	1.37696	1.34783	1.30556	1.24787	1.17862

ثم احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x=1.255$ واحسب الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند هذه النقطة.

الحل. نشكل جدول الفروق التقدمية للدالة المفروضة:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1.25	1.3914					
		−0.01444				
1.26	1.37696		−0.01469			
		−0.02913		0.00055		
1.27	1.34783		−0.01414		0.00017	
		−0.04327		0.00072		−0.00003
1.28	1.30556		−0.01342		0.00014	
		−0.05669		0.00086		
1.29	1.24787		−0.01256			
		−0.06925				
1.3	1.17862					

نلاحظ أنَّ $h=0.01, x_0=1.25$ وبالتالي:

$$s=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-1.25}{0.01}=100x-125$$

بما أنَّ المطلوب هو كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة الثالثة:

$$p_3(x)=y_0+s\Delta y_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

بالتعويض نجد أنَّ:

$$p_3(x)=1.3914+(100x-125)(-0.01444)+\frac{(100x-125)(100x-124)(-0.01466)}{2}+$$
$$+\frac{(100x-125)(100x-124)(100x-123)(0.00055)}{6}$$

$$p_3(x)=1.3914-1.444x+1.805+\frac{(10000x^2-24900x+15500)(-0.01466)}{2}+$$
$$+\frac{(10000x^2-24900x+15500)(100x-123)(0.00055)}{6}$$

$$p_3(x)=1.3914-1.444x+1.805+\frac{(10000x^2-24900x+15500)(-0.01466)}{2}+$$
$$+\frac{(10000x^2-24900x+15500)(100x-123)(0.00055)}{6}$$

$$p_3(x)=91.6666x^3-414.45x^2+604.2773x-285.4136$$

وبالتالي يكون:

$$f(1.255)\cong p_3(1.255)=1.3786$$

أما الخطأ المرتكب فيعطى:

$$R(1.255)=C_4^s\Delta^4 y_0 \quad ; \quad s=\frac{1.255-1.25}{0.01}=0.5$$

$$R(1.255)=\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}0.00017=0.000006640625$$

تمرين.

استخدم طريقة نيوتن – غريغوري التقدمية لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الموافقة للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-1	0	1	2
y_i	4	2	0	6

ثم احسب القيمة التقريبية لهذه الدالة عند النقطة $x=3$.